《正弦定理教案》

2019 数学与应用数学（公费师范）

王逸冰

2023 年 6 月

教学任务分析

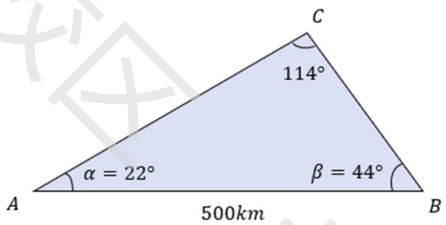
教学主题	正弦定理	所属单元	第六章 第 4 节
课程类型	新授课	课时	第__3__课时
授课对象	__高二__年级，学生人数__50__人	选用教材	必修 2 人教 A 版数学
教材分析	● 在中学数学知识体系中分析： 三角形是中学数学的主要研究对象之一，中小学阶段已对三角形进行定性研究，高中阶段正余弦定理的学习则**从定性研究上升至定量研究**，是对三角形性质的进一步深化。 ● 在整个章节中分析： 正弦定理位于平面向量这一章节，从整章的学习过程来看，可理解为**数学建模**过程：从实际情景中构建向量这一数学模型，并建构有关向量性质、运算等模型体系，最后运用向量这一数学模型解决几何问题、实际生活问题。正弦定理设置在**向量的应用部分**，旨在让学生体会向量的简便化，体现向量模型的应用价值。 ● 本节课教材内容分析： 人教版借助直角三角形与大角对大边引入，采用做垂直向量的向量法证明，共有两道例题，均为数学内部问题。对比其他教材，在定理讲解部分均或多或少创设简单实际背景。 对教材内容做以下处理： 1. 在证明定理前**增设归纳猜想环节**； 2. 借鉴其他版本教材**做垂线的向量法过渡**； 3. 增设简单的实际背景问题。		
学情分析	● 知识层面： 本班学生已掌握三角形全等判定条件、锐角三角函数、大角对大边，大部分能够熟练运用。在上一节余弦定理的学习中，学生**已了解余弦定理的证明过程**，且已学习**运用向量法证明几何问题的一般步骤**。 但学生初步接触向量，**对做辅助向量比较陌生**，在做垂直向量证明正弦定理存在思维障碍。 ● 能力层面： 在前期函数模块的学习中，学生已积累数学建模经验，但以往重点在于构建模型（函数模型），**此处重点在于求解模型**。 本班学生处于中等水平，对以往题目正答率数据分析发现，本班学生对考察观察归纳题目掌握薄弱，而**观察归纳能力**在后续数列、二项式定理等学习中都至关重要，在高考中属于重点考察能力，**所以增设观察归纳环节**，引导学生如何观察核心点，归纳结论。 ● 情感态度： 本班整体氛围活跃，能够积极与老师互动，认真完成老师交给的任务。		

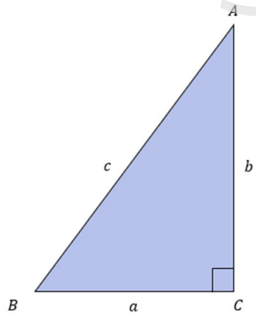
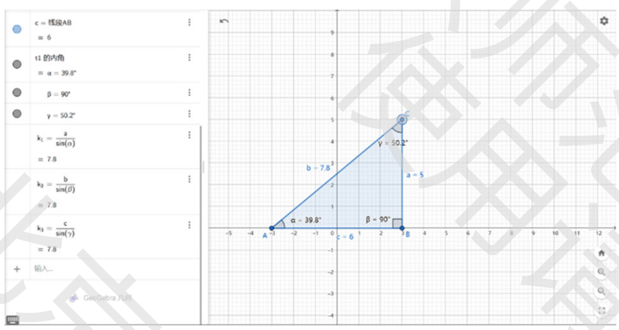
<table>
<tr><td rowspan="3">教学目标</td><td>知识
技能</td><td>1. 学生掌握正弦定理的内容与本质，理解正弦定理是对三角形边角关系的定量表示。
2. 学生能运用正弦定理求解两类解三角形问题。</td></tr>
<tr><td>过程
方法</td><td>1. 学生经历定理的发现、归纳猜想与证明过程，体会数学知识的研究过程，培养由特殊到一般的逻辑推理能力。
2. 学生通过求解流星问题，体会数学建模的一般过程，提升数学抽象与数学建模素养。</td></tr>
<tr><td>情感
态度</td><td>学生通过了解正弦定理的历史背景与应用，体会到数学与天文相互促进发展的关系，树立正弦定理不只是解题工具的正确观念，培养学生的数学史观。</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="2">1. 掌握正弦定理的内容与本质
2. 借助向量运算证明正弦定理</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="2">1.理解正弦定理的本质，即正弦定理是对三角形边角关系的定量表示。
2.学生独立建构向量法证明过程，尤其对“设垂直向量”辅助向量法的构建。</td></tr>
<tr><td>教学方法</td><td colspan="2">启发式教学法、探究式教学法、情境教学法、HPS 教学法</td></tr>
<tr><td>教具</td><td colspan="2">多媒体、板书、Geogebra</td></tr>
</table>

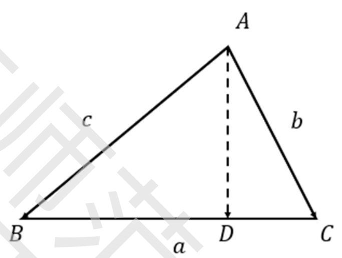
教学流程安排

流程图	内容和目的
过程 1　　情景导入——**苍穹探秘**	创设流星背景，**经历提出问题、构建模型过程**，**创设认知冲突**，激发学生学习兴趣
过程 2.1　探究新知——**发现**	**从直角三角形探究**，引导学生借助锐角三角函数逐步推导。
过程 2.2　探究新知——**猜想**	**运用 GGB 改变三角形形**，学生观察三个比值变化及关系，归纳猜想得出结论。
过程 2.3　探究新知——**证明**	引导学生运用向量法证明，**借助作垂线的方法搭建桥梁，学生自主探究辅助向量法**。
过程 3　　得出新知	从**三种数学语言**理解定理内容本质，并进行定理深化。
过程 4　　求解模型——**苍穹揭秘**	运用正弦定理求解流星问题，总结数学建模的一般过程，讲解相关数学史。
过程 6　　归纳小结	从**知识层面和能力素养层面**进行分析总结，帮助学生构建完备的数学知识体系。

教学过程设计

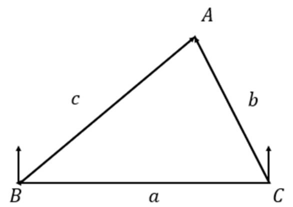
过程	教学内容	设计意图
情景导入——构建模型 (3分钟)	几千年前，人们看到流星划过天际时产生疑问： **流星是地球气象还是天外来物？** 这一问题较为模糊，需将其转化，提出更准确、可求解的问题： **测量流星距离地面的高度** 运用下方测量数据进行求解： 2021 年的第一场流星雨在 1 月 3 日亮相夜空，两位观察者在相距直线距离约为 $500km$的A,B两地，他们同时观测到一颗流星C，记录的仰角分别为α=22°，β=44°，你能算出流星与他们之间的距离吗？	运用流星问题引入，创设解答流星是否为天外来物这一问题背景，**创设认知冲突**，激发学生探究兴趣。同时与最后讲解正弦定理应用历史相呼应。
	【问题 1】 你能画出上述问题对应的几何图形，并抽象为一个数学问题吗？ 已知三角形ABC，$\angle A$= 22°，$\angle B$= 44°，$\angle C$= 114°，AB=500，求AC和CB.  引导学生类比余弦定理求解的两类题目，抽象总结出本问题模型：**已知两角与一边求解三角形.** 以上分析即为以下过程： 流星是地球气象还是天外来物 ↓ 提出问题：流行距离地面的高度是多少？ ↓ 构建模型：已知两角与一边求解三角形 ↓ 求解模型 继而为求解模型，引出本节学习内容.	学生通过完成绘制图形、抽象为数学问题的任务，对题目条件进行梳理与再深化，提升**审题能力、数形结合与数学抽象**能力。 在流星问题的整体分析中，引导学生经历提出问题——构建模型过程，提升学生**分析问题**能力，培养学生**数学抽象**和**数学建模**素养。
探究新知	**探究直角三角形边角关系：** 【问题 2】 在直角三角形ABC中，a,b,c分别是角A,B,C所对边，你能用边表示出两个锐角的正弦吗？	

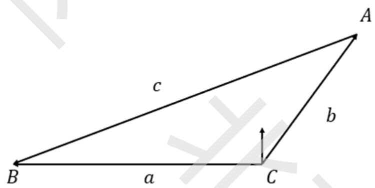
探究新知	发现 (3分钟)	$\sin A=\frac{a}{c}$ ， $\sin B=\frac{b}{c}$ 【问题 3】 对于得到的两个等式，尝试将斜边单独放置在等号一边，你能将两个等式合成一个连等式吗？ $c=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ $\downarrow \quad \sin C=1$ $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 学生根据教师提示自主推导，教师挑选学生上台板演推导过程。  	学生根据教师提示，运用锐角三角函数在直角三角形中推导，发现定理公式。引导学生运用逻辑推导自主发现新知，**提升逻辑推理能力和数形结合能力。**
	归纳 (3分钟)	**探究任意三角形边角关系：** 【问题 4】 在任意三角形中$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$这一边角关系还成立吗？除直角三角形以外，我们还需要讨论哪些三角形？ 三角形按角的大小分为**锐角三角形、直角三角形、钝角三角形**，接着在锐角三角形和钝角三角形中观察。	
			
		教师运用 GGB 改变三角形形状，学生观察三个**比值$\frac{a}{\sin A}$、$\frac{b}{\sin B}$、$\frac{c}{\sin C}$数值变化及三者关系**，发现在许多三角形中，**三个比值保持相等关系**。继而大胆	对三角形进行全分类，**培养学生分类讨论思想**，并为观察猜想及证明环节做铺垫。 借助 GGB 演示，为学生直观地呈现出多个例子，学生通过观察具体的数值关系，总结归纳出结论，培养学生**观察归纳能力**，鼓励学生大胆猜想，使学生体会知识的生成过程、数学探究的一般过程。

		猜想在所有三角形中三个比值均保持相等。	
探究新知	证明（15分钟）	【问题 5】 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$描述了三角形哪些量的关系？ 三个角　　三条边 【问题 6】 可以借助本章学习的哪一工具沟通起这些量的联系？　　向量的数量积 **三条边↔向量的长度** **三个角↔向量的夹角**	引导学生观察正弦定理描述的三角形量的关系，**建立对正弦定理本质的初步感知**。同时引导学生思考其与向量长度和夹角的对应关系，为向量法证明建构认知基础。
		【小组合作】（5min） 向量的数量积运算中出现的是角的余弦，而我们需要的是角的正弦，如何实现余弦到正弦的转化呢？并在锐角三角形中证明：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$． 学生小组讨论，教师了解各组完成情况，挑选部分组进行讲解展示。 【学生答案】 小组 1：转化关系$\cos^2 A+\sin^2 A=1$ 由此关系推导不出最终结果。 请学生对其进行分析：关系式中出现正弦的平方，而所要证明的式子中正弦为一次，会导致开方这一复杂运算，与目标不符。	学生**小组合作**探究正余弦转化方式以及正弦定理证明方法，调动学生思考以往所学知识，培养学生**逻辑推理能力**。同时在小组探究过程中，培养学生**分析、转化、绘图、合作能力**，提升**数学表达能力**。 学生自主讲解本组推导过程，培养学生的**语言表达能力**，提升学生自信心，将课堂交给学生，**以学生为中心**。
		小组 2：转化关系$\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ 为找到互余的角，做垂线，构造两直角三角形。 $\sin B=\cos(\frac{\pi}{2}-\angle BAD)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\lvert AB\rvert\cdot\lvert AD\rvert\cdot\cos\angle BAD$ $=\lvert AB\rvert\cdot\lvert AD\rvert\cdot\sin\angle B$ $=c\cdot\lvert AD\rvert\cdot\sin B$ $=\lvert AD\rvert^2$  	证明的详细推导过程与余弦定理相似，教师不做具体讲解，留给学生**自主推导演算**，培养学生的**数学运算能力**和**逻辑推理能力**。

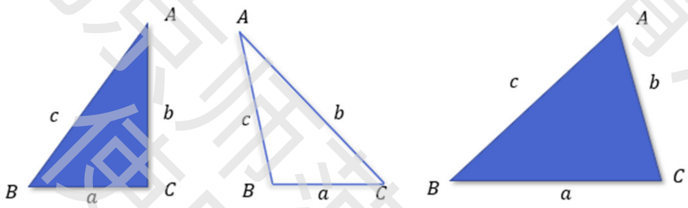
<table>
<tr>
<td rowspan="1">探究新知</td>
<td></td>
<td>教师仅讲解做辅助线思路，运用向量的推导过程留给学生 2 分钟自行推演。

【问题 8】
尝试不做垂线，只借助向量进行证明.

小组 3：
$$\vec{j}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=b\cdot\sin A$$
$$\because \vec{b}=\vec{c}+\vec{a}$$
$$\therefore \vec{j}\cdot(\vec{c}+\vec{a})=\vec{j}\cdot\vec{c}+\vec{j}\cdot\vec{a}=a\cdot\cos\beta=a\sin B$$
$$\therefore b\sin A=a\sin B$$


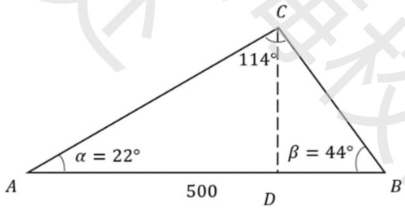
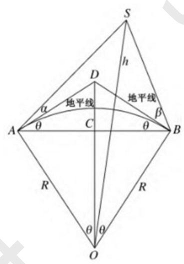
【问题 9】
在钝角三角形中证明：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

</td>
<td>因做辅助线的方法学生非常熟悉，处于学生最近发展区，利用此方法搭建桥梁，帮助学生突破做辅助向量的思维障碍，同时给予学生一定自主性，培养学生的探究精神。
学生在自主运用两种方法进行具体运算中，也可对比感知到向量在证明几何问题时带来的简便化效果。

学生类比锐角三角形中的证明过程在钝角三角形中证明，帮助学生巩固做辅助向量的方法。
同时为刚刚没有跟上节奏的同学留足时间进行内化思考。</td>
</tr>
<tr>
<td>得出新知（10分钟）</td>
<td colspan="2">【问题 10】
你能用文字语言描述正弦定理吗？
三角形的三边与其对角的正弦值之比相等

【得出新知】
文字描述：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即
符号描述：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$


【概念深化】</td>
<td>学生用文字语言描述正弦定理，有利于深入了解公式中的对象及含义，更有利于感知定理的本质含义。

学生从文字语言、符号语言、图形语言三方面认识正弦定理，加深学生对于正弦定理的理解与认识，同时提升三种数学语言的运用表达能力及三种语言的相关转化能力。</td>
</tr>
</table>

	1. 正弦定理的本质：对任意三角形边角关系的**定量**描述。 2. 正弦定理是“大角对大边”的**定量**描述。 【问题 11】 正弦定理还有哪些等价形式呢？它可以求解哪几类解三角形问题？ （1）已知两（三）角与一边 （2）已知两边与其中一边的对角	通过正弦定理的等价形式引发学生的再思考，类比余弦定理所求解的两类问题，分析总结正弦定理可求解问题。
求解模型（5分钟）	学生运用正弦定理自主求解流星问题。  $AC \approx 223.3km \qquad BC \approx 113.8km$ 过点C做高CD，可计算出流星距离地面的高度约为 $CD \approx 42.6km$ 比云层最高高度$15km$大，所以判断流星是天外来物. 整个问题的求解过程即为数学建模的一系列过程.  教师讲解正弦定理的相关数学史： 古希腊时期天文学家托勒密——10 世纪天文学家阿尔·库希——17 世纪法国天文学家——当今中国空间站 **寥寥一行正弦定理却具有丈量浩瀚宇宙的无穷力量！**   图 3 阿尔·库希的测量方案	学生运用正弦定理求解流星问题，前后呼应，解答疑问，体会正弦定理的具体运用，完成求解模型过程。 教师介绍正弦定理的运用历史，使学生体会到**数学与天文学相互促进发展的关系**，体会到数学的无穷力量，激发学习数学的**兴趣与热情**。

小结（2分钟）

知识层面：

	余弦定理	正弦定理
适用范围	任意三角形	
公式	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$
求解问题	1. 已知两边与其中一边对角 2. 已知三边	1. 已知两（三）角与一边 2. 已知两边与其中一边的对角
变式	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$	$a\sin B=b\sin A$ $a=R\cdot\sin A$, $b=R\cdot\sin B$
本质	揭示三角形边角定量关系，三角形全等、大角对大边等性质的定量描述	
其他	勾股定理是其特殊情况	大角对大边的定量描述

能力层面：

1. 数学探究的一般过程：发现——猜想——证明
2. 数学建模的一般过程：

（1）提出问题（提出可准确求解的问题）
（2）构建模型（抽象出问题本质）
（3）求解模型
（4）检验模型

从知识和能力两维度进行总结，提升学生知识能力与数学学科素养。

作业设计

1. 自行完成课本P47 例7与P48练习题
2. 自行完成课本P47例8，并思考以下问题：
   （1）为什么∠C有两个值？
   （2）如果条件改为：$\angle B=45°, b=2, c=\sqrt{2}$，结果又是什么？
3. 求证：如图1(1)，以直角三角形以外ABC斜边AB为直径作外接圆，设这个外接圆的半径为R，则

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

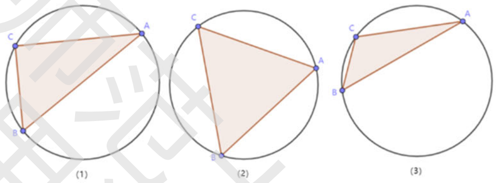
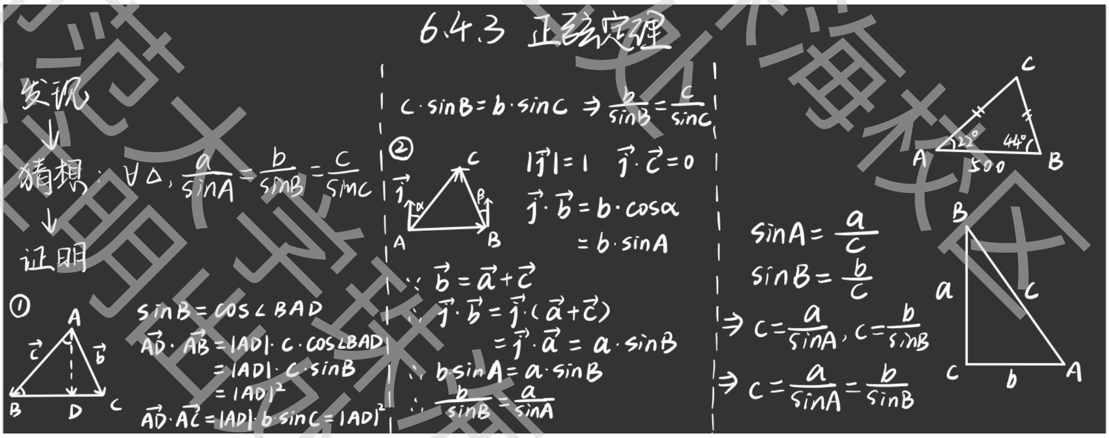
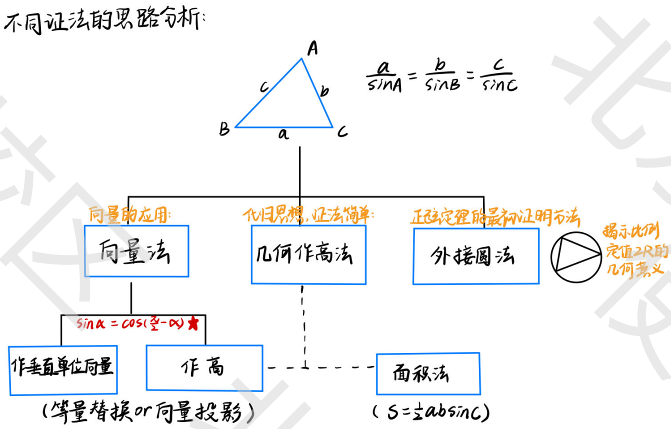


图1

选做：

1. 图1中对于锐角三角形和钝角三角形，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ 还成立吗？
2. 除了向量法，你还有别的方法证明正弦定理吗？
3. 如图2所示为地月模型简化图，其中A为柏林，B为好望角，查阅相关资料，你能大致估算出地月距离吗？

图2

板书设计	
教学反思	● 对学生思路的引导要把握好“度”，根据学生具体遇到的思维障碍给予适当提醒与指导。教师**不可一味灌输证明过程**（如可让学生先自主自考向量法证明正弦定理的思路，鼓励学生运用向量工具呈现多种证明方式），**但也不可过于开放**（如让学生课上探索正弦定理的不同证明方法：几何法、面积法、外接圆法）**否则无法突出本节课的重点向量法，也不利于教师对于时间的把控。**  ● 教师在课前要做好充分准备，借助**板书的生成过程**和 **PPT 的生成过程**，帮助学生**建构知识的生成过程**。
效果评价	选择题具有评卷速度快、信度高等优点，所以主要设计几道设有干扰选项的选择题，作为课堂效果的快速评价方式，便于教师快速掌握学情，为下节课设计提供依据。 评价表详见附件 1

附件 1：

学生学习效果评价表

题目	设计意图	对应教学目标	分值
1. 正弦定理描述了什么三角形边与角的定量关系？ A. 直角三角形　B. 锐角三角形　C. 等边三角形 D. 一般三角形	1. 许多学生误以为角只能放在直角三角形中才有正余弦值，会误以为正余弦定理只能在直角三角形中适用。 2. 正弦定理描述的是边角之比相等的关系，许多学生误认为等边三角形三边与三角相等才满足	学生掌握正弦定理的本质	2
2. 以下不是正弦定理等价形式的是： A. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$ B. $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ C. $a=k\sin A,b=k\sin B,c=k\sin C,k\neq 0$ D. $a\sin A=b\sin B=c\sin C$	1. 通过正弦定理的变形式考察学生对于正弦定理的内容是否真正掌握。 2. D 选项给出了与正弦定理符号相似，但关系不同的等式，主要考查了对于“比”还是“积”的掌握。	学生掌握正弦定理的内容	2
3. 本节求解的模型“三角形两角及一边解三角形”，为什么可以确定能够解出三角形，且三角形是唯一确定的呢？ A. 勾股定理 B. 相似三角形判定条件（AAA） C. 全等三角形判定条件（AAS\ASA） D. 大角对大边	考察学生对于初高中知识联系的理解，同时为下节课讲解另一模型“两边和一边对角”解的情况不唯一奠定基础。	学生掌握正弦定理的内容	2
4. 请将下面的证明过程补充完整： 略	考察学生证明过程的逻辑推理能力	学生理解正弦定理的证明过程	4（1分/空）

附件 2：

人教版教材《正弦定理》内容

2. 正弦定理

探究

余弦定理及其推论分别给出了已知两边及其夹角、已知三边直接解三角形的公式. 如果已知两角和一边，是否也有相应的直接解三角形的公式呢？

在初中，我们得到了三角形中等边对等角的结论. 实际上，三角形中还有大边对大角，小边对小角的边角关系. 从量化的角度看，可以将这个边、角关系转化为：

在$\triangle ABC$中，设A的对边为a，B的对边为b，求A，B，a，b之间的定量关系.

如果得出了这个定量关系，那么就可以直接解决“在$\triangle ABC$中，已知A，B，a，求b”的问题.

我们从熟悉的直角三角形的边、角关系的分析入手. 根据锐角三角函数，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中（如图 6.4-9），有

$$\sin A=\frac{a}{c},$$

$$\sin B=\frac{b}{c},$$

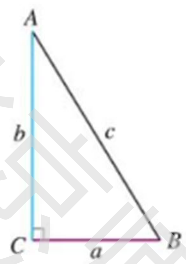


图 6.4-9

显然，上述两个关系式在一般三角形中不成立. 观察发现，它们有一个共同元素c，利用它把两个式子联系起来，可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c.$$

又因为$\sin C=\sin 90^\circ=1$，所以上式可以写成边与它的对角的正弦的比相等的形式，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

对于锐角三角形和钝角三角形，以上关系式是否仍然成立？

因为涉及三角形的边、角关系，所以仍然采用向量方法来研究.

我们希望获得$\triangle ABC$中的边a，b，c与它们所对角A，B，C的正弦之间的关系式. 在向量运算中，两个向量的数量积与长度、角度有关，这就启示我们可以用向量的数量积来探究.

思考

向量的数量积运算中出现了角的余弦，而我们需要的是角的正弦. 如何实现转化？

由诱导公式$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$可知，我们可以通过构造角之间的互余关系，把边与角的余弦关系转化为正弦关系.

下面先研究锐角三角形的情形.

如图 6.4-10，在锐角△ABC 中，过点 A 作与$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量 $\boldsymbol{j}$，则 $\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-A$，$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{CB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-C$.

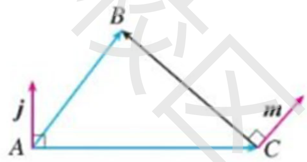


图 6.4-10

因为$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，所以

$$\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

由分配律，得

$$\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB},$$

即

$$|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\pi}{2}+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CB}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right),$$

也即

$$a\sin C=c\sin A.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理，过点 C 作与$\overrightarrow{CB}$垂直的单位向量 $\boldsymbol{m}$，可得

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

因此

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

当△ABC 是钝角三角形时，不妨设 A 为钝角（如图 6.4-11）. 过点 A 作与$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量 $\boldsymbol{j}$，则 $\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为 $A-\frac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{CB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-C$. 仿照上述方法，同样可得

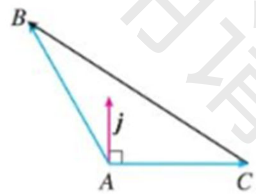


图 6.4-11

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

综上，我们得到下面的定理：

正弦定理（sine theorem）在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

> 这个公式表达形式的统一性、对称性，不仅使结果更和谐优美，而且更突显了三角形边角关系的本质.

正弦定理给出了任意三角形中三条边与它们各自所对的角的正弦之间的一个定量关系. 利用正弦定理，不仅可以解决“已知两角和一边，解三角形”的问题，还可以解决“已

知两边和其中一边的对角，解三角形”的问题.

以上我们利用向量方法获得了正弦定理、余弦定理. 事实上，探索和证明这两个定理的方法很多，有些方法甚至比上述方法更加简洁. 你还能想到其他方法吗？

例 7 在$\triangle ABC$中，已知$A=15^\circ$，$B=45^\circ$，$c=3+\sqrt{3}$，解这个三角形.

解： 由三角形内角和定理，得

$$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(15^\circ+45^\circ)=120^\circ.$$

由正弦定理，得

$$\begin{aligned}a&=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{(3+\sqrt{3})\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ}=\frac{(3+\sqrt{3})\sin(45^\circ-30^\circ)}{\sin 120^\circ}\\&=\frac{(3+\sqrt{3})(\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ)}{\sin 120^\circ}\\&=\frac{(3+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b&=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{(3+\sqrt{3})\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}\\&=\frac{(3+\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

例 8 在$\triangle ABC$中，已知$B=30^\circ$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$，解这个三角形.

分析： 这是已知三角形两边及其一边的对角求解三角形的问题，可以利用正弦定理.

解： 由正弦定理，得

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sin 30^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 $c>b$，$B=30^\circ$，

所以 $30^\circ<C<180^\circ$.

于是 $C=45^\circ$，或$C=135^\circ$.

> 为什么角 C 有两个值？

(1) 当$C=45^\circ$时，$A=105^\circ$.

此时

$$\begin{aligned}a&=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{2}\sin(60^\circ+45^\circ)}{\sin 30^\circ}\\&=\frac{\sqrt{2}(\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ)}{\sin 30^\circ}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}+1.$$

（2）当 $C=135^\circ$ 时，$A=15^\circ$.

此时

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{2}\sin\ (45^\circ-30^\circ)}{\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ)}{\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}-1.$$

由三角函数的性质可知，在区间（0，π）内，余弦函数单调递减，所以利用余弦定理求角，只有一解；正弦函数在区间$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$内单调递增，在区间$\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$内单调递减，所以利用正弦定理求角，可能有两解.

练习

1. 完成下列解三角形问题（角度精确到 1°，边长精确到 1 cm）：

（1）在△ABC 中，已知 $A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$c=20$ cm；

（2）在△ABC 中，已知 $a=20$ cm，$b=11$ cm，$B=30^\circ$.

2. （1）在△ABC 中，已知 $a=2$，$c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$A=120^\circ$，求 b 和 C；

（2）在△ABC 中，已知 $b=2$，$A=45^\circ$，$C=75^\circ$，求 c.

3. 在△ABC 中，已知 $\cos A=\frac{4}{5}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，求 a，c.